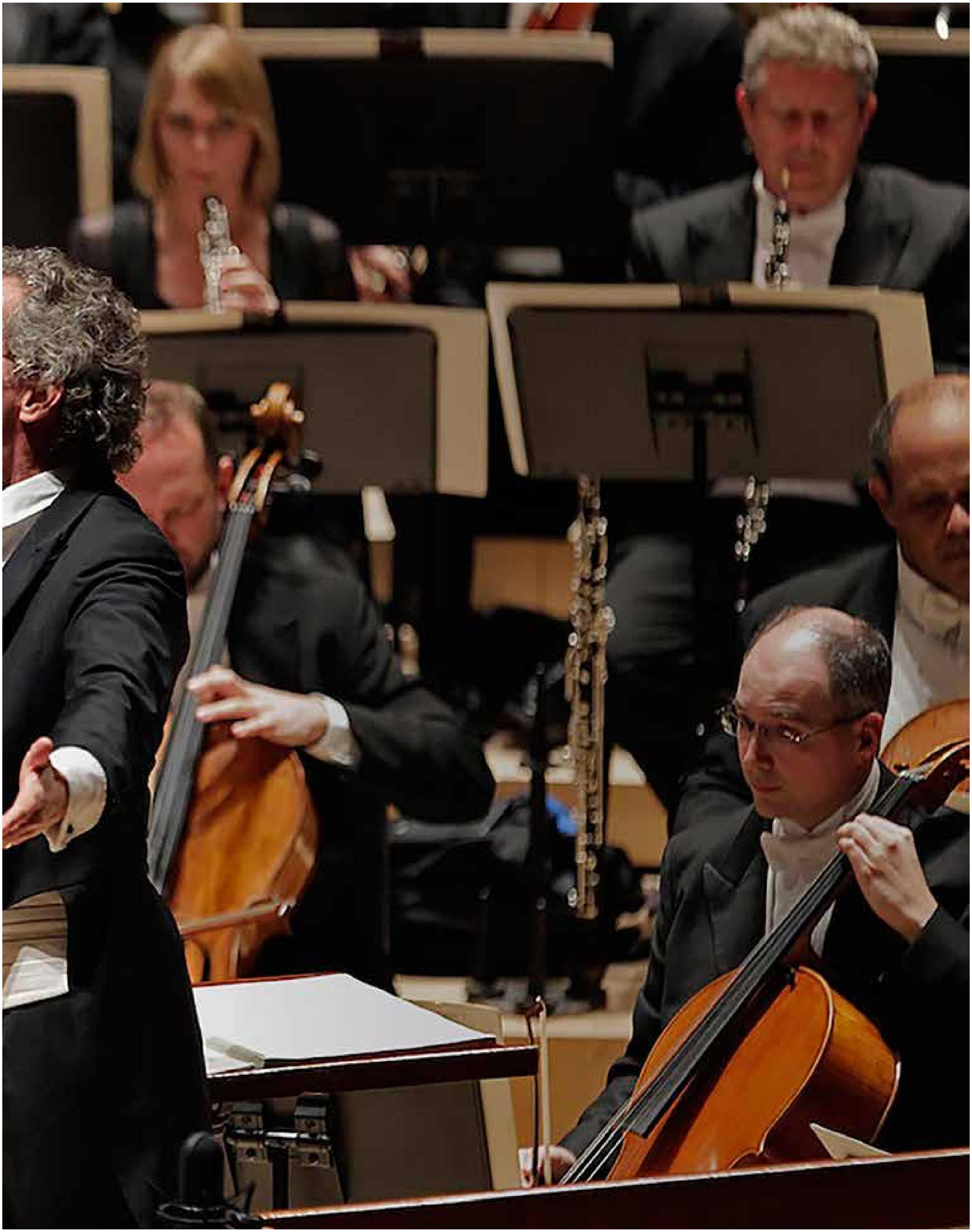
MÚSICA,
SERIALISMO Y MATEMÁTICAS

GABRIEL TÉLLEZ

Representación artística de un cometa en su viaje hacia el interior del sistema solar.
Tomada de http://fontedeunidade.blogspot.com.br/2012/12/miguel-6-etapa-17-03-2010-autres.html



Música, serialismo y matemáticas

Gabriel Téllez
Doctor en Ciencias, profesor titular del Departamento de Física de la Universidad de los Andes, Miembro correspondiente de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
gtellez@uniandes.edu.co

La música del periodo de la práctica común, es decir, desde el Barroco hasta principios del siglo XX, se caracteriza por ser tonal. En todas las composiciones musicales de ese periodo, una nota juega un rol particular, central, y a esta nota se le llama *tónica*. La música gira, entonces, en torno a esta tónica, pasando por momentos de reposo (en la tónica) y momentos de tensión (dominante), que tarde o temprano deben resolver en la tónica, con, eventualmente, momentos de preparación de la tensión (subdominante).

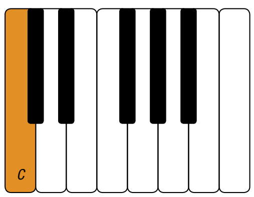
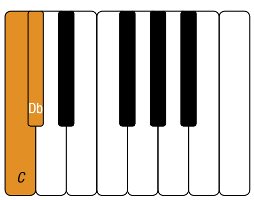
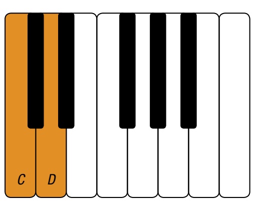
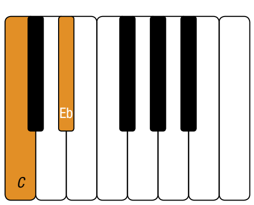
A inicios del siglo XX, varios compositores exploraban los límites de la tonalidad, y empezaron a aparecer propuestas de nueva música, cada vez más alejada de las reglas tradicionales de la música del periodo de la práctica común. Una de esas propuestas es el serialismo liderado en sus inicios por Arnold Schoenberg (1874-1952) y sus discípulos Alban Berg (1885-1935) y Anton Webern (1883-1945). La escuela musical creada por ellos se conoce en ocasiones como segunda escuela de Viena o escuela de Viena moderna, en alusión a la (primera) escuela de Viena (1780-1827), conformada principalmente por Haydn, Mozart y Beethoven.

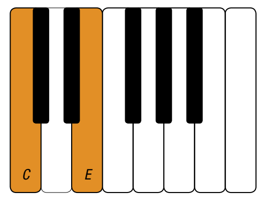
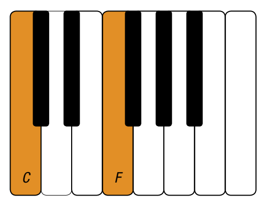
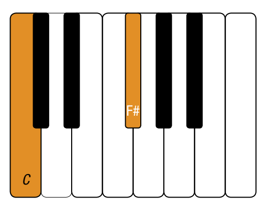
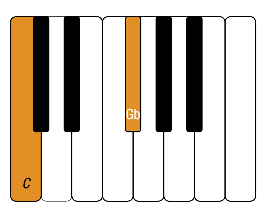
El serialismo no es un propuesta que haya aparecido de inmediato para romper con la tonalidad, sino que es más bien el fruto de varias exploraciones y composiciones que extendían y se alejaban cada vez más de los parámetros tradicionales de la música tonal. Según muchos [1], la primera obra que rompe con estos parámetros de la tonalidad es la ópera de Richard Wagner *Tristán e Isolda*, estrenada en 1865. Esta sirve de inspiración para muchos compositores de principios del siglo XX, en busca de nuevas propuestas artísticas. Este anhelo por romper con la música tonal no respondía caprichosamente a un afán de negar las reglas tradicionales porque sí, sino más bien a una busqueda por extender los parámetros de la música tonal y un deseo de lograr nuevas expresiones artísticas. En palabras de Schoenberg [1], "no existe una gran obra de arte que no traiga un mensaje nuevo a la humanidad [...] porque arte es nuevo arte". Pero al no seguir las reglas de la armonía tonal, para no caer en un caos sin sentido, era necesario idear nuevas reglas y parámetros para las composiciones. Así se fueron forjando los principios del serialismo, que tuvo su auge en la década de 1920.

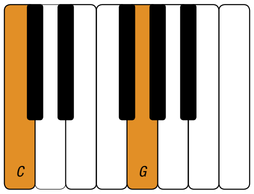
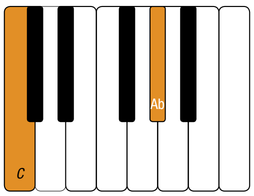
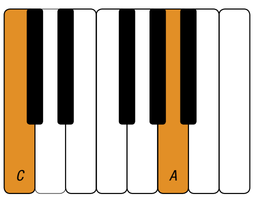
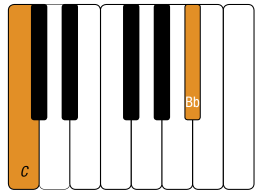
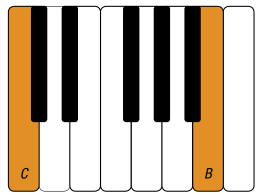
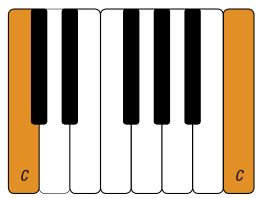
En este escrito se presenta una introducción a la forma de las composiciones musicales del serialismo, y se hace una corta exploración de algunos aspectos matemáticos relacionados con algunas de las herramientas que pueden ser utilizadas para componer este tipo de música.

CARACTERÍSTICAS DEL SERIALISMO

Una forma de apartarse de la tonalidad, en la cual una nota particular juega un rol central, es proponer una música en que ninguna nota juegue un rol más importante que otra. En la música tonal, principalmente se usan notas de la escala diatónica, eventualmente con algunas notas cromáticas como adornos de figuración melódica. Los intervalos entre notas sucesivas de la escala diatónica no son siempre iguales entre nota y nota: pueden ser un semitono o un tono entero. Esto crea una asimetría entre las notas que está en la base misma de la tonalidad, ya que cada nota juega un rol diferente: algunas son puntos de reposo y otras de tensión. Un nueva propuesta de música bien diferente a la tonal consistiría, entonces, en usar todas las doce notas de la escala cromática, sin privilegiar ninguna de ellas. En la escala cromática temperada, los intervalos entre cada nota son iguales, de un semitono. Así, de manera natural ninguna nota tiene un rol especial en su inicio. Podría decirse que es un sistema más democrático, en el que todas las notas son iguales. Un segundo elemento necesario es no repetir ninguna nota antes de que las demás ya hayan sido tocadas, ya que repetir una nota le daría un rol particular a ésta. En una conferencia dictada en Viena en 1932, Webern comentaba sobre sus *Bagatelas para cuarteto de cuerdas op.* 9 [2]: “cuando todas las doce notas han pasado, la pieza está terminada”, y a partir de esa idea elemental proponía una regla: “hasta que las doce notas no hayan ocurrido, ninguna de ellas puede ocurrir de nuevo”. Así, una *serie* de doce notas va a formar el elemento de base de una composición.

Número de semitonos	Ejemplo	Nombre
0		Unísono
1		Segunda menor
2		Segunda mayor
3		Tercera menor

Número de semitonos	Ejemplo	Nombre	
4		Tercera mayor	
5		Cuarta justa	
6		Cuarta aumentada	Tritono
		Quinta disminuida	

Número de semitonos	Ejemplo	Nombre
7		Quinta justa
8		Sexta menor
9		Sexta mayor
10		Séptima menor
11		Séptima mayor
12		Octava justa

Pero usar solo una serie de doce notas es muy limitante. Puede servir para una composición corta, tal como las *Bagatelas* de Webern, cada una de las cuales no dura más de uno o dos minutos. Pero para una composición más larga es necesario ampliar el panorama y las herramientas a disposición. Para esto, Schoenberg, usando las técnicas tradicionales del contrapunto, tales como transposición, inversión y retrogradación, transformó la serie original para obtener nuevas series que ponen a disposición del compositor más herramientas. Aunque las series derivadas son diferentes a la original, al obtenerse por procedimientos tradicionales del contrapunto, permiten que en cierto modo la serie pueda guardar su identidad.

La idea de la utilización de una serie para las alturas de las notas se extendió posteriormente a otros aspectos de la música, tales como las duraciones de las notas, las dinámicas e incluso las articulaciones, dando nacimiento a lo que se conoce como *serialismo integral*.

TRANSPOSICIÓN, INVERSIÓN, RETROGRADACIÓN Y LA MATRIZ 12 × 12

En música, la transposición es una operación consistente en aumentar o disminuir la altura de una nota encierto número dado de tonos o semitonos, que puede ir desde un semitono (segunda menor) hasta 11 semitonos (séptima mayor). Al aplicar las 11 transposiciones posibles a una serie se obtienen 11 series derivadas adicionales a la serie original. Siguiendo la terminología utilizada en la mayoría de los textos académicos [2-4], de estas doce series, la que empieza por do, se denominará *forma principal* $P0$. La que le sigue, transpuesta de un semitono, que empieza por do#, es $P1$ y así sucesivamente, hasta $P11$ que empieza por si.

La retrógradación consiste en invertir el orden de la serie, es decir, empezar por la última nota y terminar con la primera. Al transponer sucesivamente la serie retrógrada, se obtendrán 12 nuevas series derivadas, que se denominan $R0$ hasta $R11$.

Si se tiene una serie, uno puede determinar los intervalos que separan una nota de la siguiente. Con la información de esta colección ordenada de intervalos, conocida como *clase de intervalos de tono ordenados* (*ordered pitch-class intervals*) [3], a partir de la primera nota de la serie se puede reconstituir toda la serie. La inversión de un intervalo da como resultado el intervalo complementario para completar una octava. Se puede ver también como el intervalo original, pero en sentido contrario. Por ejemplo, de un intervalo de quinta justa, que tiene 7 semitonos, al invertirlo se obtiene la cuarta justa, que tiene 5 semitonos.

En este ejemplo se nota que al adicionar los dos intervalos se obtiene 7+5=12 semitonos, es decir, una octava. Ahora, a partir de la serie original, o de cualquiera de sus series transpuestas o retrógradas, se puede construir una nueva serie en la cual se han invertido los intervalos entre una nota y la siguiente. Así se obtienen 24 series más: 12 series logradas por inversión de las series principales $P0$ a $P11$, que se denotan $I0$ hasta $I11$, y otras 12 obtenidas por inversión de las series retrógradas. Estas se denotan $RI0$ hasta $RI11$. De todas estas operaciones se obtiene un total de 48 series, de las cuales puede disponer el compositor serial. Estas 48 series se pueden disponer en una tabla de 12 líneas por 12 columnas, como se detallará en la sección 4, una construcción que se conoce como la matriz 12×12.

La creación de la matriz a partir de una serie puede parecer un procedimiento algo mecánico, y efectivamente se puede automatizar con la ayuda de un computador. Sin embargo, esto no quiere decir que una composición serial sea algo mecánico, sin alma ni expresividad. Para convencerse basta con escuchar algunas de las obras de Schoenberg, Berg o Webern. La matriz es solo una herramienta a disposición del compositor serial, así como la escala diatónica y los acordes mayores y menores lo son para el compositor de música tonal. Como lo indica Joseph N. Straus en su libro *Introduction to post-tonal theory* [3], "Un buen compositor no pone solo series de principio a fin, así como Mozart tampoco ligaba escalas juntas". Desde la elección misma de la serie inicial ya entra en juego la inspiración y originalidad del compositor. Por ejemplo, Berg, para su *Concierto para violín* (1935), escogió para la serie inicial notas en sucesión de acordes mayores y menores, y las últimas notas de la serie son las mismas del inicio del coral de Bach "Es ist genug" [1]. Esta elección hace que la pieza, aunque en ella se utilice la técnica del serialismo, tenga también una reminiscencia de la música tonal, lo que la hace un poco más accesible al público acostumbrado solo a la música tonal.

ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE LA MATRIZ

En esta sección se propone hacer un análisis de la estructura que tiene la matriz desde el punto de vista de las matemáticas, en particular, su relación con el grupo de permutaciones. Varios de los conceptos que presentamos a continuación han sido desarrollados por Milton Babbit [5] y Allen Forte [6], entre otros.

Hacer un análisis matemático de cualquier tipo de música les puede parecer a algunos una tarea árida y sin interés. Sin embargo, para cualquier persona con interés y curiosidad matemática es algo que vale la pena explorar para avanzar en el conocimiento. El antagonismo entre estos dos puntos de vista siempre ha existido, como se relata en particular en el capítulo introductorio del libro de Schuijer [4] sobre la discusión acalorada que se dio a este respecto en la Cuarta Conferencia Europea de Análisis Musical, en 1999. Según Schuijer [4], un asistente defendía el uso de la teoría de Forte sobre los conjuntos de clases de tonos (*pitch-class sets*) como una herramienta analítica para el estudio de la música postonal del siglo XX, mientras que uno de los moderadores la desdeñaba diciendo que [4] "no hablamos de los conjuntos de clases de tonos, porque no los podemos oír". Aun así, tener a disposición herramientas analíticas, aun cuando sean abstractas o matemáticas, en la medida en que ayudan a la creación artística y al análisis de obras de arte, es muy útil, y permite no ir a ciegas en estos procesos.

Preliminares: notación entera, clases de tonos y clases de intervalos

Para lo que sigue es conveniente introducir una notación con números enteros para las notas, un uso bastante común no solo en el análisis de la música postonal, sino también en la música del periodo de la práctica común. La nota do, en todas sus octavas, se denotará por 0, la siguiente nota, do#, por 1, re con el número 2, y así sucesivamente, hasta completar la escala cromática de doce notas con la nota si, a la que le corresponde el número 11. Cabe anotar que un número entero de 0 a 11 no representa una sola nota, sino todas las notas del mismo nombre, ya que hay que considerar todas las octavas. Por ejemplo, 0 representa no solo un do partícular sino también todos los otros *do* que están una o más octavas abajo o arriba de este. Por eso, cada número representa en realidad una clase de notas o clase de tonos (*pitch-class*). Aquí la palabra "clase" tiene el mismo significado que en matemáticas cuando se habla de *clases de equivalencia*. La relación de equivalencia es que dos notas pertenecen a la misma *clase* si el intervalo entre ellas es de una o más octavas.

A un entero que representa una clase de tonos se le puede restar otra clase de tonos; el resultado es el intervalo entre los dos tonos. Como se hizo para los tonos, también se identificarán los intervalos que difieran de un número entero de octavas. Por ejemplo, un intervalo de novena mayor, que tiene 14 semitonos, se identifica con el intervalo de segunda mayor (2 semitonos). Así también se consideran clases de intervalos (*interval pitch-class*).

A un entero que representa una clase de tonos se le puede sumar una clase de intervalos para obtener una clase de tonos. Por ejemplo, a re (2) le podemos sumar una quinta justa (7) para obtener la ($2 + 7 = 9$). Pero estas operaciones de suma y resta deben hacerse módulo 12 para tener los resultados dentro de una misma octava. Por ejemplo, si a si ♭ (10) le sumamos una tercera menor (3 semitonos) obtenemos re ♭ ($10 + 3 = 13 = 1$ [mód. 12]).

Ejemplo de construcción de una matriz

Una serie, como se explicaba, es una colección ordenada de 12 notas, pero sin tener en cuenta en qué octava están esas notas. Es decir que la serie es una colección ordenada de clases de tonos. Por ejemplo, consideremos la serie

xxxxxxx

$P0:\ 0\ 8\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 9\ 6\ 11\ 7\ 10$

Para transponer esta serie de un semitono hacia arriba se le debe sumar 1 (módulo 12) a cada nota, para obtener

$P1:\ 1\ 9\ 5\ 6\ 2\ 3\ 4\ 10\ 7\ 0\ 8\ 11$

Y así sucesivamente se obtienen $P2$ hasta $P11$. Siguiendo la convención de [3], el número n delante de Pn indica la nota con que empieza la serie: $P0$ empieza con 0, $P1$ empieza con 1, etc.

La retrogradación de una serie se obtiene leyéndola (o interpretándola) desde el final hacia el principio. Por ejemplo, la retrógrada de $P0$ es

$R0:\ 10\ 7\ 11\ 6\ 9\ 3\ 2\ 1\ 5\ 4\ 8\ 0$

Transponiendo $R0$ se obtienen $R1$ (retrogradación de $P1$), $R2$, etc. Por ejemplo,

$R1:\ 11\ 8\ 0\ 7\ 10\ 4\ 3\ 2\ 6\ 5\ 9\ 1$

Cabe anotar que con el número n delante de Rn corresponde aquí a la nota con que termina la serie; por ejemplo $R1$ termina con 1.

Consideremos de nuevo $P0$, y miremos qué intervalos separan cada par de notas sucesivas.

$$P0:\ 0 \xrightarrow{8} 8 \xrightarrow{8} 4 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{8} 1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{6} 9 \xrightarrow{9} 6 \xrightarrow{5}$$
$$11 \xrightarrow{8} 7 \xrightarrow{3} 10$$

En lo anterior se indicó encima de la flecha el intervalo entre las notas, contanto éste sistemáticamente como intervalo ascendiente (subiendo la nota destino a la octava superior si es necesario). Si se invierten estos intervalos, empezando en 0, se obtiene la serie

$$I0:\ 0 \xrightarrow{4} 4 \xrightarrow{4} 8 \xrightarrow{11} 7 \xrightarrow{4} 11 \xrightarrow{11} 10 \xrightarrow{11} 9 \xrightarrow{6} 3 \xrightarrow{3}$$
$$6 \xrightarrow{7} 1 \xrightarrow{4} 5 \xrightarrow{9} 2$$

Para la denominación de la serie invertida usamos aquí la misma convención que en [3], en donde el número n después de In corresponde a la primera nota de la serie. Como se hizo con $P0$, la serie invertida $I0$ se puede transponer para obtener $I1$ hasta $I11$ y retrogradar para obtener $RI0$ hasta $RI11$. Observemos cómo son $R0$ y $RI0$ y sus intervalos en comparación con $P0$ e $I0$

$$R0:\ 10 \xrightarrow{9} 7 \xrightarrow{4} 11 \xrightarrow{7} 6 \xrightarrow{3} 9 \xrightarrow{6} 3 \xrightarrow{11} 2 \xrightarrow{11} 1 \xrightarrow{4}$$
$$5 \xrightarrow{11} 4 \xrightarrow{4} 8 \xrightarrow{4} 0$$

$$IR0:\ 2 \xrightarrow{3} 5 \xrightarrow{8} 1 \xrightarrow{5} 6 \xrightarrow{9} 3 \xrightarrow{6} 9 \xrightarrow{1} 10 \xrightarrow{1} 11 \xrightarrow{8}$$
$$7 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{8} 4 \xrightarrow{8} 0$$

Nótese que *Pn* e *IRn* tienen los mismos intervalos, pero en orden retrógrado; igualmente *In* y *Rn* tienen los mismos intervalos en orden retrógrado. También, por construcción, los intervalos de *Pn* son los de *In* en el mismo orden, pero en inversión. Igualmente se presenta esta misma relación entre los intervalos de *Rn* e *IRn*.

La disposición tradicional de la matriz es la siguiente. En la primera línea se escribe $P0$ de izquierda a derecha. En la primera columna, empezando por el 0 de $P0$ se escribe $I0$ de arriba hacia abajo. Luego se siguen llenando las líneas con series primarias *Pn*, una por una, empezando por la nota que quedó ya establecida en la primera columna al haber escrito $I0$. Queda así una tabla 12×12, en la que se leen todas las 48 series: en las líneas, leídas de izquierda a derecha, se encuentran las primarias *P*, en las columnas, leídas de arriba hacia abajo, se encuentran las inversiones *I*. Leyendo las líneas de derecha a izquierda encontramos las retrógradas *R*, y finalmente, leyendo las columnas de abajo hacia arriba encontramos las inversiones de las *IR*. Una particularidad de esta tabla es que, por construcción, en la diagonal siempre se encuentran ceros. La matriz correspondiente a la serie que se escogió como ejemplo es esta:

	$I0$ ↓	$I8$ ↓	$I4$ ↓	$I5$ ↓	$I1$ ↓	$I2$ ↓	$I3$ ↓	$I9$ ↓	$I6$ ↓	$I11$ ↓	$I7$ ↓	$I10$ ↓	
$P0 \rightarrow$	0	8	4	5	1	2	3	9	6	11	7	10	$\leftarrow R0$
$P4 \rightarrow$	4	0	8	9	5	6	7	1	10	3	11	2	$\leftarrow R4$
$P8 \rightarrow$	8	4	0	1	9	10	11	5	2	7	3	6	$\leftarrow R8$
$P7 \rightarrow$	7	3	11	0	8	9	10	4	1	6	2	5	$\leftarrow R7$
$P11 \rightarrow$	11	7	3	4	0	1	2	8	5	10	6	9	$\leftarrow R11$
$P\ 10 \rightarrow$	10	6	2	3	11	0	1	7	4	9	5	8	$\leftarrow R10$
$P9 \rightarrow$	9	5	1	2	10	11	0	6	3	8	4	7	$\leftarrow R9$
$P3 \rightarrow$	3	11	7	8	4	5	6	0	9	2	10	1	$\leftarrow R3$
$P6 \rightarrow$	6	2	10	11	7	8	9	3	0	5	1	4	$\leftarrow R6$
$P\ 10 \rightarrow$	1	9	5	6	2	3	4	10	7	0	8	11	$\leftarrow R10$
$P5 \rightarrow$	5	1	9	10	6	7	8	2	11	4	0	3	$\leftarrow R5$
$P2 \rightarrow$	2	10	6	7	3	4	5	11	8	1	9	0	$\leftarrow R2$
	↑ $RI0$	↑ $RI8$	↑ $RI4$	↑ $RI5$	↑ $RI1$	↑ $RI2$	↑ $RI3$	↑ $RI9$	↑ $RI6$	↑ $RI11$	↑ $RI7$	↑ $RI10$	

Relaciones con el grupo de permutaciones

Lo presentado en las secciones anteriores está cubierto en los textos académicos [3, 4] sobre análisis de música postonal, además de varios otros temas. En esta sección, un poco más técnica, proponemos una exploración adicional de la estructura de la matriz y sus relaciones con el grupo de permutaciones. Esta es el resultado de reflexiones propias del autor de este escrito. En esta sección se hace uso de algunos conceptos elementales de teoría de grupos, en particular del grupo de permutaciones. El lector no familiarizado con estos conceptos puede consultar cualquier texto guía de álgebra abstracta, como, por ejemplo, [7].

En matemáticas, una permutación es una operación biyectiva de un conjunto finito en sí mismo, por ejemplo, del conjunto de los números enteros de 0 a 11 en sí mismo. Así se ve que una serie tal como la definimos anteriormente se puede representar en matemáticas por una permutación de 12 elementos. El análisis que sigue puede realizarse eventualmente para una escala cromática arbitraria, no necesariamente de 12 notas. Si dividimos la octava en N intervalos iguales, obtendremos una escala temperada cromática de N notas. El grupo de permutaciones de N elementos se denota por S_N. Una serie, entonces, se puede representar por una permutación de S_N escogida arbitrariamente. Al haber elegido una serie, luego de las transposiciones (musicales) necesarias se tiene como punto de partida $P0$ la serie principal, empezando por la nota do (0). Esa serie también se puede obtener realizando una permutación sobre los números de 0 a N-1 ordenados. Llamemos σ_{P0} a esta permutación. $P0$ se caracteriza por que su primera nota es 0, es decir, $\sigma_{P0}(0) = 0$ en lenguaje matemático. Aparte del primero, los demás elementos pueden estar en cualquier orden, es decir, se pueden obtener con cualquier permutación de los restantes N-1 elementos. Una pregunta que se puede uno hacer al empezar a estudiar las series y la matriz es cuántas posibilidades hay para escoger la serie inicial. El análisis anterior nos da la respuesta: hay un número igual al número de permutaciones de $N-1$ elementos. De la teoría del grupo de permutaciones se sabe que este número es $(N-1)!$. Por ejemplo, para la escala de doce notas usual $N = 12$, el número de diferentes series $P0$ que se puede elegir es $11! = 11 \times 10 \times 9 \times \ldots \times 1 = 39\,916\,800$.

Estudiemos cómo se pueden obtener las otras series Pn, In, Rn e RIn, a partir de $P0$, en términos de operaciones de composición de permutaciones con la permutación inicial σ_{P0}. Para esto es necesario introducir dos permutaciones particulares que realizan las operaciones de transposición (en el sentido musical) y retrogradación. La transposición de un semitono se puede realizar con la permutación σ_T, definida así:

$$\sigma_T(i) = i + 1 \pmod N$$

Transposiciones de más de un semitono se pueden obtener repitiendo la permutación σ_T el número de veces que sea necesario: para transponer n semitonos una serie hay que operar $(\sigma_T)^n$ sobre la serie original. Así, las series derivadas Pn se pueden representar por $(\sigma_T)^n \circ \sigma_{P0}$ para $n \in \{0, 1, \ldots N\}$.

La operación de retrogradación de una serie se puede representar gracias a la permutación σ_R, definida así:

$$\sigma_R(i) = N - 1 - i \pmod N$$

Para obtener $R0$, se deben tomar los números ordenados de 0 a $N-1$, invertir su orden, es decir, aplicar σ_R, y luego realizar la permutación σ_{P0} sobre estos números en el orden $N-1$ a 0. Entonces vemos que $R0$ está representada por $\sigma_{P0} \circ \sigma_R$. Luego, a $R0$ se le pueden realizar las transposiciones necesarias para obtener $R1$ hasta RN. Como las transposiciones se obtienen al aplicar σ_T, deducimos que Rn está representada por $(\sigma_T)^n \circ \sigma_{P0} \circ \sigma_R$.

Para obtener $I0$, la representación de la inversión de la serie $P0$ hay que considerar la permutación $\sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0}$. Ilustremos esto con un ejemplo, usando la serie $P0$ de ejemplo de la sección anterior. La aplicación sucesiva de estas tres permutaciones se muestra a continuación:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\sigma_{P0}\ \downarrow$												
	0	8	4	5	1	2	3	9	6	11	7	10
$\sigma_T^{-1}\ \downarrow$												
	11	7	3	4	0	1	2	8	5	10	6	9
$\sigma_R\ \downarrow$												
	0	4	8	7	11	10	9	3	6	1	5	2

El resultado final es, efectivamente, la serie $I0$.

Pero como un ejemplo particular no constituye una demostración, demostremos el caso general. $I0$ está caracterizada por dos propiedades: empieza por 0 y sus intervalos entre notas sucesivas son los intervalos invertidos de los de $P0$. Ahora, en general tenemos $\sigma_{P0}(0) = 0$, $\sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0}(0) = \sigma_T^{-1}(0) = N - 1$, y por lo tanto $\sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0}(0) = \sigma_R(N-1) = N - 1 - (N-1) = 0$. Así, la primera nota de la serie representada por $\sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0}$ es efectivamente 0.

Consideremos ahora dos notas consecutivas de esta serie: sea k un entero de 0 a $N-2$ y sean $i = \sigma_{P0}(k)$ y $j = \sigma_{P0}(k+1)$. El intervalo entre estas notas es $j - i$. El intervalo de estas notas transformadas por la permutación $\sigma_R \circ \sigma_T^{-1}$ es

$$\sigma_R \circ \sigma_T^{-1}(i) - \sigma_R \circ \sigma_T^{-1}(j) =$$

$$N - 1 - (i - 1) - (N - 1 - (j - 1)) \pmod N$$

$$= j - i \pmod N,$$

xxxxxxx

que es efectivamente el intervalo invertido de $i - j$. Así queda demostrado que $\sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0}$ es la permutación que representa a $I0$.

Las transposiciones de la serie invertida, *In*, están entonces representadas por $(\sigma_T)^n\ \sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0}$. La retrogradación de la serie invertida *RI*0 está representada por $\sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0} \circ \sigma_R$, y sus transposiciones *IRn* por $(\sigma_T)^n\ \sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0} \circ \sigma_R$. En resumen:

Serie	Permutación que la representa
$P0$	σ_{P0}
Pn	$(\sigma_T)^n \circ \sigma_{P0}$
$R0$	$\sigma_{P0} \circ \sigma_R$
Rn	$(\sigma_T)^n \circ \sigma_{P0} \circ \sigma_R$
$I0$	$\sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0}$
In	$(\sigma_T)^n \circ \sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0}$
$RI0$	$\sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0} \circ \sigma_R$
RIn	$(\sigma_T)^n \circ \sigma_R \circ \sigma_T^{-1} \circ \sigma_{P0} \circ \sigma_R$

Ya se mencionó que el número de diferentes posibilidades para la elección de $P0$ es $(N-1)!$. Sin embargo, con el análisis anterior vemos que el número de matrices $N \times N$ diferentes que se pueden obtener es en realidad menor a este número. Esto es porque si se elige una nueva serie, diferente a $P0$, pero que resulte ser la invertida de $P0(I0)$, o la retrógrada de la última línea de la matriz, o la retrógrada inversa que está en la última columna de la matriz (todas estas empiezan por la nota 0, como debe ser para una serie tipo $P0$), luego de las operaciones ya mencionadas se obtendrá la misma matriz, eventualmente con el orden de las líneas y/o columnas cambiado, pero con las mismas notas a disposición. Así, las posibilidades se reducen en un factor 4. Aún así, las posibilidades siguen siendo enormes para la escala cromática dodecafónica usual: $11!/4 = 9\ 979\ 200$.

Como se ha podido escribir las series como resultado de operaciones de composición ($\circ$) de permutaciones, puede surgir la pregunta de si el conjunto de estas permutaciones forma un subgrupo del grupo de permutaciones S_N. Un subgrupo es un subconjunto de un grupo estable por las operaciones de composición del grupo, y este debe contener el elemento identidad (permutación identidad) y el inverso de cada elemento. Por lo tanto, la respuesta es negativa: el conjunto de las permutaciones que representan las series no forman un subgrupo, pues en general no contienen la permutación identidad (esta correspondería a una serie en que las notas están ordenadas de forma cromática: do, do#, re, etc.). Podría ser interesante extender las series utilizadas para así conformar un subgrupo de S_N. Habría así una estructura matemática completa atractiva detrás de las series. Sin embargo, esto aumentaría considerablemente el número de series a disposición, y la utilización de demasiadas series podría confundir al oído y hacer que se pierda la unidad y coherencia de una obra. Ya incluso en la mayoría de obras del serialismo, aunque en teoría haya 48 series a disposición, el compositor no utiliza sino algunas pocas de ellas, justamente para guardar cierta unidad y coherencia.

Usando la teoría desarrollada en esta sección, el autor desarrolló un sencillo programa de computador que crea la matriz a partir de una serie propuesta. El código fuente de este, así como versiones ejecutables del programa, están disponibles en la página web del autor http://wwwprof.uniandes.edu.co/~gtellez/, en la sección "Música". Los ejemplos de series y matrices mostrados en este trabajo se generaron con ese programa. Aunque existen en línea otros programas con funcionalidad similar [8, 9], el estudio del código fuente de este programa permite ilustrar los aspectos matemáticos presentados anteriormente en esta sección.

Conclusión

En este trabajo se presentó una introducción al serialismo y un análisis de las estructuras matemáticas asociadas con las técnicas del serialismo. Por limitaciones de espacio y tiempo no se pudieron tratar en detalle otros aspectos interesantes de esta manifestación artística en música, tales como sus relaciones con los eventos socioculturales e históricos de principios del siglo XX. Para una introducción al serialismo desde esta perspectiva, así como para escuchar algunas de las principales obras representativas de esta música, se invita al lector a consultar el interesante documental conducido por *sir* Simon Rattle, Orchestral Music in the 20th Century [1]. ●

REFERENCIAS

[1] Rattle SS. Leaving home: orchestral music in the 20th century, vol. 1, Arthaus Musik, DVD; 2005.

[2] Whittall A. Serialism. Cambrigdge: Cambridge University Press; 2008.

[3] Straus JN. Introduction to post-tonal theory. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall; 2005.

[4] Schuijer M. Analyzing atonal music. Rochester: University of Rochester Press; 2008.

[5] Babbitt M. The collected essays of Milton Babbitt. Princeton: Princeton University Press; 2003.

[6] Forte A. The structure of atonal music. New Haven: Yale University Press; 1977.

[7] Gallian JA. Contemporary abstract algebra. Boston: Cengage Learning, 2012.

[8] http://composertools.com/Tools/matrix/MatrixCalc.html

[9] http://www.musictheory.net/calculators/matrix.